ANALISI MATEMATICA II

3 maggio 2012

Il candidato è tenuto a rispondere correttamente ai quesiti A-D prima di procedere allo svolgimento degli esercizi della seconda parte. **Le risposte vanno giustificate.**

Prima parte.

A. Provare che il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y}$$

non esiste.

B. Si dimostri che l'equazione

$$f(x,y) = x^2 y + e^{x+y} = 0$$

definisce implicitamente un'unica funzione $\varphi = \varphi(x)$ definita su $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

C. Determinare il limite puntuale della successione

$$f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} \qquad x \in \mathbf{R}$$

e dire se la convergenza è uniforme in $\mathbf{R}$, motivandone la risposta.

D. Scrivere l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$x''(t) + x(t) = \cos(t).$$

Seconda parte.

1. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + (0,t)^T \\ \mathbf{x}(0) = (1,0)^T. \end{cases}$$

2. Calcolare l'integrale

$$\int_B |x - 1/2| \, dx \, dy \, dz,$$

dove

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}.$$

3. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita dalla formula

$$f(t, x) = x + \frac{1}{1 + (tx)^2}.$$

(i) Discutere esistenza, unicità e prolungabilità delle soluzioni dei problemi di Cauchy

$$(*) \qquad x' = f(t, x) \qquad x(\tau) = \xi;$$

(ii) studiare il luogo delle soluzioni della disequazione

$$f(t, x) \geq 0;$$

(iii) disegnare un grafico qualitativo della soluzione del problema di Cauchy $(*)$ con $\tau = \xi = 0$.